УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
9 КЛАСС

1) Некоторая функция f удовлетворяет свойству: $\forall x > 0 \quad 2f(x) + f(1/x) = 1$. Найти $3f(20152016)$.

Решение: По условию имеем $\forall x > 0 \quad 2f(x) + f(1/x) = 1$, сделаем замену переменной: $1/x = t$, $x = 1/t$, $t > 0$. Тогда $\forall t > 0 \quad 2f(1/t) + f(t) = 1$. Вычтем из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим: $-3f(y) = -1 \quad \forall y > 0$. Отсюда $f(y) = 1/3 \quad \forall y > 0$.

Ответ: 1.

2) Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

80658175170943878571660636856403766975289505440883277 8x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом х) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

Решение: В разложении числа 52! на простые множители,

$$52! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots \tag{1}$$

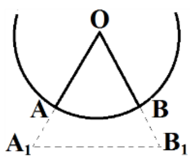
степень пятерки $c = 12$. Действительно, множитель 5 дают числа 5,10,15,20, 25..., причем разложения чисел 25 и 50 содержат 5 во второй степени. Степень же двойки a, очевидно, существенно больше 12. Рассмотрим произведение простых сомножителей в правой части (1). Каждый ноль на конце десятичной записи числа 52! – результат перемножения одной 2 и одной 5. Именно поэтому нулей на конце тоже 12. Двоек у нас существенно больше, чем пятерок, поэтому, если в записи числа 52! отбросить все нули на конце, то получившееся в результате число

80658175170943878571660636856403766975289505440883277 8x4 (2)

будет делиться на 2 в достаточно высокой степени. В частности, число (2) делится на 2^4=16, а это значит, что на 16 делится число, образованное его четырьмя последними цифрами. Прямым перебором находим, что число 78x4 делится на 16 только при x=2.

Ответ: 2.

3) Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1 Найдите отношение длины отрезка A_1B_1 к длине дуги AB. В качестве ответа укажите получившееся отношение, умноженное на π. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$). (Ответ дайте в виде десятичной дроби, например, 14.7)



Решение: Длина дуги AB в шесть раз меньше длины окружности и равна $\pi R/3$. Длина основания A_1B_1 равна $2OA_1 \sin\dfrac{\angle AOB}{2} = 2R \cdot 1{,}05 \sin 30^0 = 1{,}05R.$

Ответ: 3.12.

4) Уравнения $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x)=x^4+2x^3-x^2-2x-3$ на многочлен $Q(x)=x^4+3x^3+x^2-4x-6$ с остатком: $P(x)=F(x)Q(x)+R(x)$. Общие корни многочленов $P(x),Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x)=-x^3-2x^2+2x+3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке x^2+x-3. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: -1.

5) Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), $1\le a\le 10, 1\le b\le 10, a>b$, для которых число $a^{2015}-b^{2015}$ делится нацело на число $a+b$?

Решение: Обозначим $c=a+b.$ Сразу отметим, что из условия $a=c-b>b$ следуют неравенства

$$19\ge c>2b, \tag{1}$$

$$c-b\le 10. \tag{2}$$

Далее, $a^{2015}-b^{2015}=\left(c-b\right)^{2015}-b^{2015}=\ldots$. Здесь троеточием обозначены слагаемые, заведомо делящиеся на c. Таким образом, число $a^{2015}-b^{2015}$ делится на число c в том и только том случае, когда на c делится произведение $2b^{2015}$. Последнее возможно, например, когда $c=1$ или $c=2,$ но такие значения c не удовлетворяют неравенству (1).

Теперь для $c\ge 3$ изучим делимость $2b^{2015}$ на c при всех значениях $b\in[1;9]$:

1) $b=1,$ тогда $c=2.$ Этот случай уже рассмотрен;

2) $b=2,$ тогда $c\in\{4,8,16\}$. Находим **1** пару (a,b): (6,2). Случай $c=4$ не удовлетворяет (1), а случай $c=16$ не удовлетворяет (2);

3) $b=3,$ тогда $c\in\{3,6,9,18\}$. Для $c=9$ находим **1** пару (6,3). Случаи $c=3$ и $c=6$ не удовлетворяют (1). Случай $c=18$ не удовлетворяет (2);

4) $b=4,$ тогда $c\in\{4,8,16\}$. Случаи $c=4$ и $c=8$ не удовлетворяют (1). Случай $c=16$ не удовлетворяет (2);

5) $b=5,$ тогда $c\in\{5,10\}$. Эти случаи не удовлетворяют (1);

6) $b=6,$ тогда $c\in\{3,4,6,8,9,12,16,18\}$. Для $c=16$ находим **1** пару (10,6). Случаи $c=3,4,6,8,9,12$ не удовлетворяют (1). Случай $c=18$ не удовлетворяет (2);

7) $b=7,$ тогда $c\in\{7,14\}$. Эти случаи не удовлетворяет (1);

8) $b=8,$ тогда $c\in\{4,8,16\}$. Эти случаи не удовлетворяет (1);

9) $b=9,$ тогда a должна равняться 10, и $c=19$, но при этом $2b^{2015}$ не делится на c.

Ответ: 3 пары.

6) Числа a, b удовлетворяют равенствам $a^3+3a^2+6a=-7$ и $b^3+3b^2+6b=-1$. Найдите $a+b$.

Решение: Перепишем левые части равенств следующим образом:

$$a^3+3a^2+6a=(a+1)^3+3a-1=(a+1)^3+3(a+1)-4,$$
$$b^3+3b^2+6b=(b+1)^3+3b-1=(b+1)^3+3(b+1)-4.$$

Выполнив замену $A=a+1,\ B=b+1,$ представим данные в условии равенства в виде:

$$A^3+3A+3=0, \qquad B^3+3B-3=0.$$

Сложив их, получим $(A+B)(A^2-AB+B^2+3)=0 \Leftrightarrow A+B=0.$ Отсюда $a+b=-2.$

Ответ: -2.

10 КЛАСС

1) Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 53 включительно и записал в тетрадь ответ:

4274883284060025564298013753389399649690343788366813724б6x2000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру.

Решение: В разложении числа 53! на простые множители,

$$53! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots \qquad (1)$$

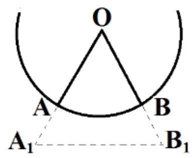
степень пятерки $c = 12$. Действительно, множитель 5 дают числа 5,10,15,20, 25..., причем разложения чисел 25 и 50 содержат 5 во второй степени. Степень же двойки a, очевидно, существенно больше 12. Рассмотрим произведение простых сомножителей в правой части (1). Каждый ноль на конце десятичной записи числа 53! – результат перемножения одной 2 и одной 5. Именно поэтому нулей на конце тоже 12. Двоек у нас существенно больше, чем пятерок, поэтому, если в записи числа 53! отбросить все нули на конце, то получившееся в результате число

4274883284060025564298013753389399649690343788366813724б6x2 (2)

будет делиться на 2 в достаточно высокой степени. В частности, число (2) делится на 2^4=16, а это значит, что на 16 делится число, образованное его четырьмя последними цифрами. Прямым перебором находим, что число 46x2 делится на 16 только при x=7.

Ответ: 7 .

2) Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 4%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Найдите отношение длины отрезка A_1B_1 к длине дуги AB. В качестве ответа укажите получившееся отношение, умноженное на π .



(Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.) (Ответ дайте в виде десятичной дроби, например, 14.7)

Решение: Длина дуги AB в шесть раз меньше длины окружности и равна $\pi R/3$. Длина основания A_1B_1 равна $2OA_1 \sin\frac{\angle AOB}{2} = 2R \cdot 1{,}04 \sin 30^0 = 1{,}04R.$

Ответ: 3.12.

3) Уравнения $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$ и $x^4 + 3x^3 - 6x - 8 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 4$ на многочлен $Q(x) = x^4 + 3x^3 - 6x - 8$ с остатком: $P(x) = F(x)Q(x) + R(x)$. Общие корни многочленов $P(x), Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x + 4$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке $x^2 + x - 4$. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: -1.

4) В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Каждого человека мы должны вписать в один из трех списков: 1) "команда 1", 2) "команда 2", 3) "люди, не вошедшие ни в одну из команд". Распределить 10 человек по этим спискам можно 3^{10} способами. Это и был бы ответ в задаче, если бы не требование, что списки 1 и 2 не пусты. Значит из общего числа 3^{10} надо вычесть те распределения учеников, когда список 1 или 2 (или они оба) пуст. Распределить учеников так, чтоб список 1 был пуст можно 2^{10} способами (у каждого ученика две возможности: отправиться в список 2 или 3). Аналогично, количество распределений учеников, при которых будет пустым список 2, также равно 2^{10}. Значит, из 3^{10} надо вычесть $2 \cdot 2^{10}$, но при этом вариант, когда все ученики находятся в списке 3, мы учли 2 раза. Поэтому, окончательный ответ: $3^{10}-2 \cdot 2^{10}+1$ способ.

Ответ: 57002.

5) Найдите значение выражения $a^4+b^4+c^4$, если известно, что числа a,b,c удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$ (Ответ дайте в виде десятичной дроби, например, 14.7)

Решение: Обозначим $X=a+b+c,\ Y=a^2+b^2+c^2,\ Z=a^3+b^3+c^3,\ U=ab+bc+ac$. Тогда $X^2=Y+2U$, откуда

$$U=\left(X^2-Y\right)/2. \qquad (1)$$

Далее

$$X^3=Z+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+6abc=$$
$$=Z+3ab(a+b+c)+3ac(a+b+c)+3bc(a+b+c)-3abc=Z+3UX-3abc.$$

Отсюда

$$abc=\left(-X^3+Z+3UX\right)/3. \qquad (2)$$

Наконец,

$$XZ=a^4+b^4+c^4+a\left(b^3+c^3\right)+b\left(a^3+c^3\right)+c\left(a^3+b^3\right)=$$
$$=a^4+b^4+c^4+\left(ab+bc+ac\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-c^2ab-a^2bc-b^2ac=$$
$$=a^4+b^4+c^4+UY-abcX.$$

Находим искомое выражение:

$$a^4+b^4+c^4=XZ-UY+abcX. \qquad (3)$$

По условию $X=4, Y=9, Z=19$. Из (1) находим $U=7/2$, затем из (2): $abc=-1$, и с помощью (3) получаем ответ: $a^4+b^4+c^4=81/2$.

Ответ: 40.5.

6) Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n>2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа *x* называется наибольшее целое число, не превосходящее *x*. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Чтобы при каком-то натуральном n имело место неравенство $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$, должно существовать натуральное число m такое, что $\sqrt{9n+2}<m\leq\sqrt{9n+4}\Leftrightarrow 9n+2<m^2\leq 9n+4$. Следовательно, m^2 равен либо $9n+3$, либо $9n+4$. Но квадрат целого числа при делении на 9 не может дать остаток 3. Значит, остается вариант $m^2=9n+4$. Итак, будем искать такие n, при которых число $9n+4$ представляет собой полный квадрат. При делении на 9 квадрат целого числа дает остаток 4, только когда само число при делении на 9 дает остаток 2. Поэтому, полагаем $m=9t+2,\ t\in\mathrm{N}_0$. Далее $(9t+2)^2=9n+4\Leftrightarrow n=9t^2+4t$. Остается выбрать наименьшее натуральное t такое, что $9t^2+4t\geq 2015$. Для этого оценим больший корень уравнения $9t^2+4t-2015=0$:

$$t_{\max}=\frac{-2+\sqrt{4+9\cdot 2015}}{9}.$$

Поскольку $134<\sqrt{4+9\cdot 2015}<135$, заключаем, что $14<t_{\max}<15$, и искомое n равно $9\cdot 15^2+4\cdot 15=2085$.

Ответ: 2085.

11 КЛАСС

Вариант 1

1. Уравнения $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ на многочлен $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6$ с остатком: $P(x) = F(x)Q(x) + R(x)$. Общие корни многочленов $P(x), Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке $-x^2 - x + 3$. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

2. Найдите наименьшее натуральное n такое, что $n > 2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right] \neq \left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Чтобы при каком-то натуральном n имело место неравенство $\left[\sqrt{9n+2}\right] \neq \left[\sqrt{9n+4}\right]$, должно существовать натуральное число m такое, что $\sqrt{9n+2} < m \le \sqrt{9n+4} \Leftrightarrow 9n+2 < m^2 \le 9n+4$. Следовательно, m^2 равно либо $9n+3$, либо $9n+4$. Но квадрат целого числа при делении на 9 не может дать остаток 3. Значит, остается вариант $m^2 = 9n+4$. Итак, будем искать такие n, при которых число $9n+4$. представляет собой полный квадрат. При делении на 9 квадрат целого числа дает остаток 4, только когда само число при делении на 9 дает остаток 2. Поэтому, полагаем $m = 9t+2,\ t \in \mathrm{N}_0$. Далее $(9t+2)^2 = 9n+4 \Leftrightarrow n = 9t^2 + 4t$. Остается выбрать наименьшее натуральное t такое, что $9t^2 + 4t \ge 2015$. Для этого оценим больший корень уравнения $9t^2 + 4t - 2015 = 0$:

$$t_{\max} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 9 \cdot 2015}}{9}.$$

Поскольку $134 < \sqrt{4 + 9 \cdot 2015} < 135$, заключаем, что $14 < t_{\max} < 15$, и искомое n равно $9 \cdot 15^2 + 4 \cdot 15 = 2085$.

Ответ: 2085.

3. Найдите значение выражения $a^4+b^4+c^4$, если известно, что числа a,b,c удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$

Решение: Обозначим $X=a+b+c$, $Y=a^2+b^2+c^2$, $Z=a^3+b^3+c^3$, $U=ab+bc+ac$. Тогда $X^2=Y+2U$, откуда

$$U=\left(X^2-Y\right)/2. \qquad (1)$$

Далее

$$X^3=Z+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+6abc=$$
$$=Z+3ab(a+b+c)+3ac(a+b+c)+3bc(a+b+c)-3abc=Z+3UX-3abc.$$

Отсюда

$$abc=\left(-X^3+Z+3UX\right)/3. \qquad (2)$$

Наконец,

$$XZ=a^4+b^4+c^4+a\left(b^3+c^3\right)+b\left(a^3+c^3\right)+c\left(a^3+b^3\right)=$$
$$=a^4+b^4+c^4+\left(ab+bc+ac\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-c^2ab-a^2bc-b^2ac=$$
$$=a^4+b^4+c^4+UY-abcX.$$

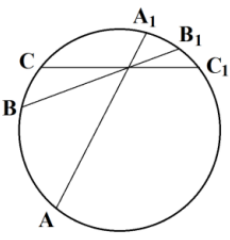
Находим искомое выражение:

$$a^4+b^4+c^4=XZ-UY+abcX. \qquad (3)$$

По условию $X=4, Y=9, Z=19.$ Из (1) находим $U=7/2,$ затем из (2): $abc=-1,$ и с помощью (3) получаем ответ: $a^4+b^4+c^4=81/2.$

Ответ: 81/2.

4. В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^0, 30^0, 60^0$ и 30^0. Найдите угловую меру дуги B_1C_1. Ответ укажите в градусах.



Решение: Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

1) Пусть угловая мера дуги AB (рис.1) равна φ. (Это означает, что φ равен соответствующий центральный угол AOB.) Тогда длина хорды $AB=2R\sin\left(\varphi/2\right)$. Здесь R – радиус окружности.

2) Пусть две хорды AA_1 и BB_1 пересекаются в точке T (рис.2). Угловые меры дуг AB и A_1B_1 равны φ и ν. Треугольники ATB и A_1TB_1 подобны по двум углам (равные

углы отмечены). Коэффициент подобия $k = AB / A_1B_1 = \sin\left(\varphi / 2\right) / \sin(v / 2)$.

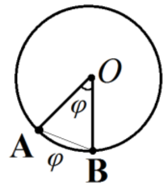


Рис.1

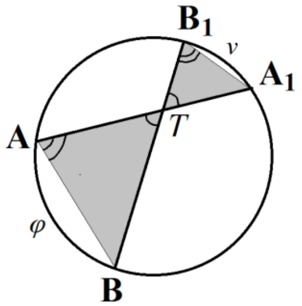


Рис.2

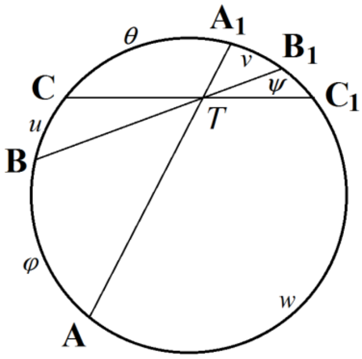


Рис.3

3) Обратимся к рисунку 3. В одной точке, обозначенной Т, пересекаются три хорды. Угловые меры получившихся шести дуг отмечены на рисунке. Из подобия треугольников ATB и A_1TB_1 следует (см. пункт 2) равенство $AT / B_1T = \sin\left(\varphi / 2\right) / \sin(v / 2)$. Аналогично, $\Delta BTC \sim$ $\Rightarrow B_1T / CT = \sin\left(\psi / 2\right) / \sin(u / 2)$, $\Delta CTA_1 \sim$ $\Rightarrow CT / AT = \sin\left(\theta / 2\right) / \sin(w / 2)$. Перемножив три последних равенства, получим:

$$1 = AT / B_1T \cdot B_1T / CT \cdot CT / AT = \sin\left(\varphi / 2\right) / \sin(v / 2) \cdot \sin\left(\psi / 2\right) / \sin(u / 2) \cdot \sin\left(\theta / 2\right) / \sin(w / 2).$$

Таким образом, необходимым (а на самом деле и достаточным) условием того, что три хорды пересекаются в одной точке является равенство:

$$\sin\left(\varphi / 2\right) \sin\left(\theta / 2\right) \sin\left(\psi / 2\right) = \sin(u / 2) \sin(v / 2) \sin(w / 2).$$

Теперь несложно получить ответ в задаче. Подставив в это соотношение данные задачи $w = 150^0, \varphi = 30^0, \theta = 60^0, v = 30^0$, а также выразив u из равенства $\varphi + u + \theta + v + \psi + w = 360^0$, получаем для определения искомого угла ψ следующее уравнение:

$$\sin 15^0 \sin(\psi / 2) \sin 30^0 = \sin 15^0 \sin\left((90^0 - \psi) / 2\right) \sin 75^0.$$

Отсюда несложно получить, что $\psi = 60^0$.

Ответ: 60.